⋆

Exercice 1

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension n et f un endomorphisme de E. Pour tout réel a, on note $E_a(f) = \{x \in E \mid f(x) = a \cdot x\}$

1) Vérifier que pour tout réel a, $E_a(f)$ est un sous-espace vectoriel de E.

On dit qu'un réel a est une valeur propre de f si et seulement si il existe un vecteur x non nul de E tel que $f(x) = ax$.

2) Montrer que a est une valeur propre de f si et seulement si $E_a(f) \neq \{0\}$.
3) Montrer que si λ et μ sont deux réels distincts, alors $E_\lambda(f)$ et $E_\mu(f)$ sont en somme directe.
4) Montrer que si $\lambda_1, ..., \lambda_r$ sont r valeurs propres distinctes, alors $E_{\lambda_1}(f), ..., E_{\lambda_r}(f)$ sont en somme directe.
5) Montrer que si f admet n valeurs propres distinctes, alors il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ est diagonale.

⋆

Exercice 2

1) Montrer que les valeurs propres d'une matrice triangulaire supérieure sont sur sa diagonale.
2) Donner un exemple de matrice carrée d'ordre 2 dont aucune des valeurs diagonale n'est valeur propre.

⋆

Exercice 3

1) Montrer que pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, M est inversible si et seulement si ${}^tM$ est inversible.
2) Soit A un matrice carrée d'ordre n et $\lambda \in \mathbb{R}$ une valeur propre de A. Montrer que λ est valeur propre de ${}^tA$.

⋆

Exercice 4

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Montrer que f n'est pas diagonalisable.

⋆

Exercice 5

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

Justifier que f est diagonalisable, puis déterminer une base de diagonalisation.

⋆

Exercice 6

Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 8 & 1 \end{pmatrix}$$

1) Montrer que $X^2 - 4X - 5$ est un polynôme annulateur de A.
2) Montrer que $(u + \mathrm{Id}) \circ (u - 5\mathrm{Id}) = (u - 5\mathrm{Id}) \circ (u + \mathrm{Id}) = 0_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)}$
3) En déduire que $\mathrm{Im}(u + \mathrm{Id}) \subset \mathrm{Ker}(u - 5\mathrm{Id})$ et que $\mathrm{Im}(u - 5\mathrm{Id}) \subset \mathrm{Ker}(u + \mathrm{Id})$.
4) En étudiant le rang de $u + \mathrm{Id}$ et $u - 5\mathrm{Id}$, montrer que $\dim(\mathrm{Ker}(u + \mathrm{Id}) \oplus \mathrm{Ker}(u - 5\mathrm{Id}) \geq 3$.
5) En déduire que u est diagonalisable.

★

Exercice 7

On considère l'application linéaire $\varphi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ définie par

$$\varphi(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 + x_3, x_2 + x_4, x_1 + x_3, x_2 + x_4)$$

1) Déterminer la matrice représentative de φ dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$.
2) Montrer que 0 et 2 sont valeurs propres de φ.
3) Montrer que φ est diagonalisable en précisant la dimension de ses sous-espaces propres.

★

Exercice 8

On considère l'application :

$$u : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_n[X] \\ P(X) & \longmapsto & XP'(X) + P(X+1) \end{array}$$

1) Vérifier que u est bien un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
2) Déterminer la matrice représentative de u dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$
3) En déduire que u est diagonalisable.

★ ★

Exercice 9

Soit A un matrice carrée de taille n à coefficients réels. On suppose que A est de rang 1 et que $\mathrm{tr}(A) \neq 0$.

1) Justifier qu'il existe deux matrices X et Y dans $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$ telles que $A = {}^tXY$.
2) En déduire que $A^2 = \mathrm{tr}(A)A$.
3) En déduire qu'il existe un réel c non nul tel que $X(X-c)$ est un polynôme annulateur de A.
4) On pose $F = \mathrm{Ker}(A)$ et $G = \mathrm{Ker}(A - cI)$. Montrer que F et G sont supplémentaires dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et en déduire que A est diagonalisable.

★ ★

Exercice 10

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie n et soit $f \in \mathcal{L}(E)$.

1) Soit $k \geq 1$. Démontrer que $\mathrm{Ker}(f^k) \subset \mathrm{Ker}(f^{k+1})$ et $\mathrm{Im}(f^{k+1}) \subset \mathrm{Im}(f^k)$.
2) a) Démontrer que si $\mathrm{Ker}(f^p) = \mathrm{Ker}(f^{p+1})$ alors $\mathrm{Ker}(f^{p+1}) = \mathrm{Ker}(f^{p+2})$.
   b) Démontrer qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que :
      - Si $k < p$, alors $\mathrm{Ker}(f^p) \neq \mathrm{Ker}(f^{k+1})$
      - Si $k \geq p$, alors $\mathrm{Ker}(f^k) = \mathrm{Ker}(f^{k+1})$.

   c) Démontrer que $p \leq n$.
3) Démontrer que si $k < p$, alors $\mathrm{Im}(f^k) \neq \mathrm{Im}(f^{k+1})$ et si $k \geq p$, alors $\mathrm{Im}(f^k) = \mathrm{Im}(f^{k+1})$.
4) Démontrer que $\mathrm{Ker}(f^p)$ et $\mathrm{Im}(f^p)$ sont supplémentaires.
5) Démontrer qu'il existe deux sous-espaces vectoriels F et G de E tels que F et G sont supplémentaires dans E, $f_{|F}$ est nilpotent et $f_{|G}$ induit un automorphisme de G.
6) Pour tout $k \geq 1$ on note $d_k = \dim(\mathrm{Im}(f^k))$. Montrer que la suite $(d_k - d_{k+1})$ est décroissante.